King Faisal
PRIZE

الأسس الرياضية ذات الأثر المستدام
الإرث العلمي لكارلوس كينيغ

نجلاء التويجري

ملخص

تعتمد كثير من منجزات العلم والتقنية الحديثة على المعادلات التفاضلية الجزئية بوصفها اللغة الرياضية التي تصف التغير في المكان والزمان. غير أن المعادلات الأقرب إلى الواقع تكون غالبًا غير خطية، وتعمل ضمن بيئات غير منتظمة، وتقاوم أساليب الحل الكلاسيكية. تستعرض هذه المقالة، بلغة علمية ميسرة دون إخلال بالصرامة، كيف أسهمت أعمال كارلوس كينيغ في تحويل تحليل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وظواهر الحدود، وكيف عززت الأسس النظرية اللازمة لنمذجة موثوقة، وما الذي فتحته من آفاق تطبيقية وبحثية تمتد من ميكانيكا الموائع وانتشار الموجات إلى مسائل الاستدلال العكسي والتعلم الآلي العلمي المقيد بالفيزياء.

1 مقدمة: لماذا تهم الرياضيات خارج الرياضيات

تعتمد العلوم والتقنيات الحديثة على الرياضيات بصورة عميقة، حتى عندما لا يظهر ذلك لغير المتخصصين. لحين نصف ظاهرة فيزيائية أو حيوية أو تقنية، فإننا نبحث عن نموذج يحدد كيف تتطور الكميات في المكان والزمان، وما الذي ينتج عن تفاعلها. وفي قلب كثير من هذه النماذج تقع المعادلات التفاضلية الجزئية ،(PDEs) التي تمثل الإطار الأساسي لوصف الانتشار، والحركة، والتوازن، والتذبذب [1].

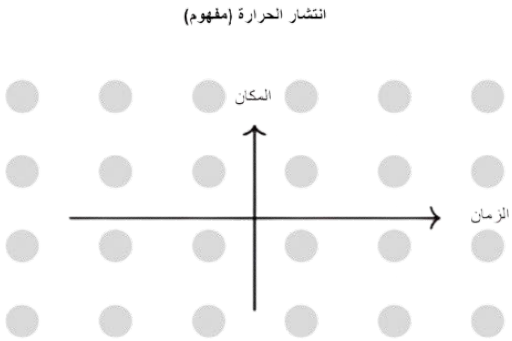
ورغم الطابع التجريدي لهذه المعادلات، فإن أثرها حاضر في تفاصيل كثيرة من حياتنا: انتقال الحرارة يدعم تقنيات العزل والمواد، ومعادلات الموجات تقف وراء الصوتيات والبصريات والاتصالات، ونماذج الموائع تشكل أساسًا لهندسة الطيران ونمذجة الطقس والمناخ. غير أن اعتماد العلوم التطبيقية على هذه النماذج لا يكتمل إلا بفهم رياضي صارم يحدد متى تكون المعادلة حسنة الوضع (أي لها حل، وحلها وحيد، ويتغير بصورة مستقرة عند تغير المعطيات)، ومتى تكون الحسابات العددية قابلة للثقة.

في هذا السياق، تبرز مساهمات كارلوس كينيغ بوصفها نقطة تحول. فقد أسهمت أعماله خلال عقود في بناء أطر تحليلية جديدة تمكّن من التعامل مع ما يميز النماذج الواقعية: اللاخطية، والخشونة وعدم الانتظام، وتعقيد السلوك قرب الحدود. وقد أدى دمج كينيغ بين أدوات التحليل التوافقي ونظرية المعادلات التفاضلية الجزئية إلى إعادة تشكيل طريقة طرح الأسئلة وبناء الأدلة، وإلى ترسيخ أدوات أصبحت اليوم جزءًا من "عدة العمل" القياسية في التحليل الحديث [9,4,3].

ما يميز هذا الإرث ليس فقط حل مسائل بعينها، بل تأسيس رؤية منهجية تمتد أثرًا عبر الرياضيات والعلوم التطبيقية: إذ تمنح هذه الأطر ضمانات عن السلوك المتوقع للنماذج في ظروف غير مثالية، وتوضح الحدود التي ينبغي أن تراعيها التطبيقات الهندسية والعلمية عند استخدام المعادلات بوصفها أدوات للتنبؤ والتصميم.

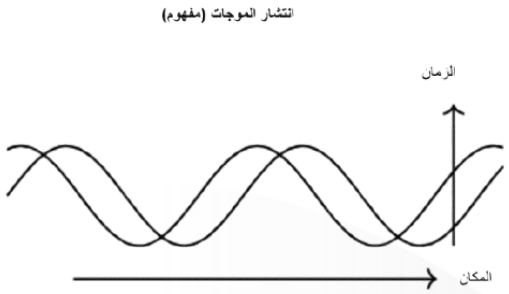
2 فهم المعادلات التفاضلية الجزئية لغير المتخصصين

تنشأ المعادلات التفاضلية الجزئية عندما نصف كميات تتغير في المكان والزمان معًا. فدرجة الحرارة داخل جسم ليست قيمة واحدة؛ بل توزيع على نقاط الجسم، ويتغير مع الزمن. وبالمثل، فإن الصوت والضوء ينتشران كموجات تتطور مكانياً وزمنياً تترجم PDE هذه الفكرة عبر ربط معدلات التغير المكاني والزمني بقانون يحكم الظاهرة (مثل قانون انتقال الحرارة أو قانون حفظ الكتلة/الطاقة) [1].



تتفاوت درجات الحرارة من الحارة إلى الباردة

تصف المعادلة التفاضلية الجزئية كيفية تغير كمية ما (درجة الحرارة مثلاً) في كل من المكان والزمان



الموجات تتحرك ، تنعكس ، وتتفاعل

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية الموجات لنمذجة حركة الصوت / الضوء عبر بيئات معقدة

لماذا تبدو هذه المعادلات صعبة؟

هناك ثلاث خصائص تجعل PDE الحديثة تحديًا حقيقيًا:

(1) اللاخطية: كثير من المعادلات في الفيزياء والموائع والموجات غير خطية، أي إن تأثير المدخلات لا ينعكس بشكل تناسبي على المخرجات. اللاخطية تمثل تفاعلات داخل النظام: موجات قد تتعزز أو تتلاشى، وجريان قد يتحول إلى اضطراب، وحدود قد تتحرك تبعًا للحل نفسه. في هذه البيئة، قد تؤدي تغييرات صغيرة إلى آثار كبيرة، ولا تعود الأدوات الخطية التقليدية كافية [2].

(2) الخشونة وعدم الانتظام: النماذج الواقعية لا تفترض دائمًا حدودًا ناعمة أو معاملات ملساء. فالأسطح قد تكون خشنة، والوسط غير متجانس، والبيانات مشوبة بالضوضاء. نتيجة لذلك، قد لا تكون الحلول ملساء، وقد تظهر تفردات (نقاط أو مناطق ينكسر عندها الوصف الكلاسيكي). ومن ثم يصبح فهم الوجود والفرادة والاستقرار أمرًا محوريًا [5].

(3) أثر الحدود: كثير من الظواهر تتحدد قرب الحدود أو عبرها: انعكاس الموجات، سلوك الجريان قرب الجدار، أو انتقال الحرارة عبر سطح. لذا لا يكفي فهم المعادلة في "الداخل" فقط؛ بل يجب فهم التفاعل مع الحدود وكيفية صياغة الشروط الحدية التي تجعل النموذج حسناً وقابلاً للتفسير [6].

من البحث عن صيغة الحل إلى فهم البنية

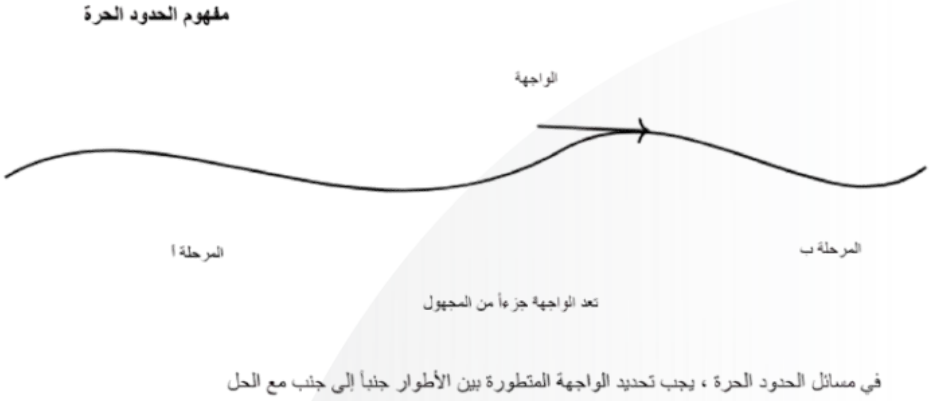
كان جزء كبير من تاريخ PDE مرتبطًا بإيجاد حلول صريحة لمسائل نموذجية. لكن مع تعقيد النماذج الحديثة، اتجهت النظرية إلى ما يمكن تسميته الفهم البنيوي: كيف يتصرف الحل عمومًا؟ ما أقل الشروط التي تضمن الوجود والفرادة؟ كيف يتحدد الانتظام؟ وكيف نقيس الحساسية للاضطرابات؟ هذه الأسئلة هي الأساس الذي يجعل النماذج العلمية قابلة للاعتماد، وهي الخلفية التي ظهرت فيها إسهامات كينيغ بصورة حاسمة [4,3].

3 إسهامات كينيغ التحويلية: ماذا غيّر في نظرية PDE

لا يُختزل أثر كينيغ في نتيجة واحدة؛ بل يتجسد في خطوط بحثية أعادت بناء أدوات المجال. ويمكن إبراز ثلاث مسارات مركزية:

(أ) مسائل الحدود الحرة: عندما يكون الحد جزءًا من المجهول

في كثير من الأنظمة، الحد الفاصل بين طورين أو مادتين ليس ثابتًا، بل يتحدد ويتحرك تبعًا للحل (مثل سطح السائل، أو جبهة ذوبان، أو واجهة في تحول طوري). تسمى هذه مسائل الحدود الحرة، وهي من أصعب مسائل التحليل لأنها تجمع بين معادلة تفاضلية وهندسة متحركة. وقد أظهرت نتائج رائدة في هذا المجال أن الواجهات قد تمتلك انتظامًا وبنية قوية تحت شروط واقعية، وأن "النظام" يمكن أن ينشأ حتى في بيئات تبدو غير مستقرة [8,7].



(ب) نظرية الانتظام تحت افتراضات دنيا

التطبيقات لا تمنح دائمًا نعومة عالية في المعطيات أو الحدود. لذا تصبح النتائج التي تعمل تحت افتراضات دنيا ذات قيمة استثنائية. وقد أسهم كينيغ في ترسيخ هذا الاتجاه عبر إظهار أن الانتظام المعقول يمكن استخلاصه حتى عندما تكون البيئة خشنة، وأن كثيرًا من الظواهر يمكن ضبطها بآليات تحليلية دقيقة. لهذه النتائج أثر مباشر على الثقة في النمذجة العددية؛ إذ إن ضمانات الانتظام والاستقرار غالبًا ما تبرر تقارب الخوارزميات وحساسية النتائج [4,6].

(ج) التحليل التوافقي كإطار موحِّد لفهم الحدود والتفردات

يُعد دمج التحليل التوافقي (خاصة أدوات الترددات والمقاييس المتعددة) مع PDE من أبرز سمات مدرسة كينيغ. هذا المنظور يسمح بفهم الظواهر عبر تفكيكها إلى مقاييس مختلفة، مما يكشف بنى خفية داخل المعادلات ويساعد على التعامل مع التفردات والحدود. وقد أصبحت هذه الأدوات اليوم معيارًا في التحليل الحديث [3,9].

4 من النظرية إلى الواقع: التطبيقات والأثر على الحياة والعلم

قد تبدو نتائج التحليل في PDE بعيدة عن الحياة اليومية، لكنها تؤدي دورًا جوهريًا في جعل النماذج العلمية موثوقة لا مجرد معادلات أنيقة. ففي كثير من المجالات، الفرق بين نموذج مفيد ونموذج مضلل يتحدد بقدرتنا على ضمان الوجود والفرادة

والاستقرار وفهم الحدود.

ميكانيكا الموائع

تصف معادلات الموائع (ومن أشهرها نافيه--ستوكس) ظواهر تمتد من تصميم الطائرات إلى التيارات البحرية ونمذجة المناخ. هذه المعادلات غير خطية، وتظهر فيها صعوبات تتعلق بالحدود وعدم الانتظام. إن نتائج الانتظام والتحليل قرب الحدود تدعم الأسس التي تقوم عليها المحاكاة العددية الحديثة في ديناميكا الموائع [2,10].

انتشار الموجات ونقل الإشارات

في الاتصالات والصوتيات والبصريات، تتحدد جودة النمذجة بقدرتنا على فهم انتشار الموجات في أوساط غير مثالية: طبقات مختلفة، عوائق، وحدود خشنة. أدوات مسائل القيم الحدية وفهم التفاعل مع الحدود ضرورية لتحليل الانعكاس والانكسار والتخميد، وهي ظواهر تؤثر مباشرة في التصميم الهندسي [3,11].

التصوير الطبي والمسائل العكسية

تعتمد تقنيات عديدة في التصوير الطبي على المسائل العكسية: استنتاج بنية داخلية من قياسات على الحدود. هذه المسائل حساسة لأنها قد تضخم الضوضاء، وقد تكون غير مستقرة إذا غابت ضمانات رياضية مناسبة. لذلك، فإن الإطار التحليلي الذي يركز على الفرادة والاستقرار والانتظام هو حجر الأساس لفهم حدود ما يمكن استنتاجه بثقة [12].

علوم المواد والتحولات الطورية

في المواد متعددة الأطوار، تظهر واجهات متحركة وانتقالات طورية وتشكل شقوق. كثير من هذه النماذج يقع في قلب مسائل الحدود الحرة، حيث تكون الواجهة جزءًا من المطلوب. إن النتائج التي تضمن انتظام الواجهة أو تصف آليات تشكل التفردات تساعد على بناء نماذج أكثر قدرة على التنبؤ، وتدعم تصميم مواد ذات خصائص مستهدفة [13,7].

5 الأثر طويل المدى والإرث العلمي

يمكن قياس الإرث العلمي لكينيغ بثلاث سمات مترابطة:

(1) تحويل الأسئلة إلى أطر قابلة للتعميم: بدل حل مسألة منفردة، سعى إلى كشف بنى مشتركة في فئات واسعة من المعادلات، مما جعل الأدوات قابلة للنقل بين مجالات متعددة [3].

(2) ترسيخ ثقافة المتانة: أي البحث عن نتائج تعمل في بيئات واقعية، تحت خشونة وحدود غير مثالية، وهو ما يزيد صلة النظرية بالتطبيق [6,4].

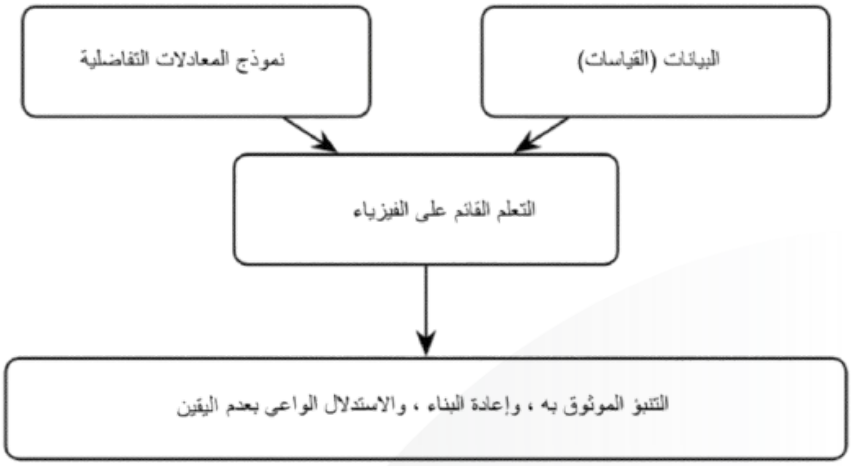
(3) قيادة فكرية وتأثير ممتد: عبر التعاون العلمي والإشراف وتكوين مدرسة بحثية، أصبحت أفكاره جزءًا من البنية الأساسية للتحليل الحديث، بحيث تتوسع وتُستخدم في مسارات لم تكن مطروحة من قبل.

6 مسارات مستقبلية تمكّنها أفكار كينيغ

قيمة الرياضيات الأساسية لا تقف عند التطبيقات القائمة، بل تمتد إلى ما تفتحه من مسارات جديدة. وفي السنوات الأخيرة، برز اتجاه يتقاطع فيه التحليل الرياضي مع البيانات والذكاء الاصطناعي ضمن ما يُعرف أحيانًا بـ"التعلم الآلي العلمي".

نماذج هجينة تجمع البيانات وبنية PDE

في كثير من التطبيقات الحديثة، تُستخدم البيانات لتقدير معاملات مجهولة أو تمثيل أجزاء معقدة من الفيزياء، بينما تُستخدم PDE لضمان الاتساق البنيوي. نجاح هذه النماذج الهجينة يتوقف على مفاهيم حسن الوضع والاستقرار والانتظام، أي على الأسس التي تجعل الدمج بين البيانات والمعادلات قابلاً للثقة.



منظور مفاهيمي للتعليم القائم على الفيزياء: الجمع بين البيانات وقيود المعادلات التفاضلية الجزئية للحصول على استدلال موثوق

التعلم المقيد بالفيزياء (PINNs) والتعلم الآلي العلمي

تُعد الشبكات العصبية المقيدة بالفيزياء (PINNs) مثالاً على دمج قيود PDE داخل خوارزميات التعلم. غير أن هذه الأساليب لا تكون موثوقة إلا بقدر ما نفهم شروط حسن الوضع وحساسية الحلول، ومتى يمكن للقيود أن تضبط التعلم أو تفشل في ذلك. من هنا تظهر الحاجة الدائمة إلى الأساس التحليلي الصارم [15,14].

الأنظمة متعددة المقاييس، المناخ، والواجهات

في نمذجة المناخ والجيولوجيا، تتداخل مقاييس متعددة: محلية وعالمية، سريعة وبطيئة. كما تظهر واجهات وطبقات وحدود ذات بنى معقدة. في مثل هذه النماذج، لا يكفي الحساب وحده؛ بل نحتاج إلى أدوات تحدد ما الذي يبقى مستقرًا تحت تغيرات المقاييس والمعطيات. إن التركيز على المتانة والحدود والواجهات يظل ذا قيمة كبيرة للمستقبل [16].

7 الخاتمة

يجسد إرث كارلوس كينيغ أصالة علمية وعمقًا منهجيًا وتأثيرًا طويل المدى. فقد أسهمت أعماله في إعادة تشكيل تحليل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، ورسخت أدوات تسمح بالتعامل مع خشونة الواقع والحدود المعقدة واللاخطية بوصفها سمات طبيعية للنماذج، لا استثناءات تُهمَل.

كما أن أهمية هذا الإرث تتجلى اليوم بوضوح: فكلما اتسع اعتماد العلوم على النمذجة والحوسبة والبيانات، ازدادت الحاجة إلى أسس رياضية تحدد متى تكون النتائج قابلة للثقة، وكيف تُقاس حساسيتها، وما حدود استخدامها. ومن هذا المنظور، فإن أعمال كينيغ لا تمثل إنجازًا في الرياضيات البحتة فحسب، بل تمثل قاعدة معرفية تعزز تقدم العلوم والتقنية بصورة يمكن الاتكاء عليها. ولهذه الأسباب، ينسجم أثره العلمي انسجامًا تامًا مع رسالة جائزة الملك فيصل في تكريم الإسهامات التي توسع حدود المعرفة الإنسانية وتدعمها على المدى الطويل

المراجع

[1] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., American Mathematical Society, 2010.

[2] A. Majda and A. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge University Press, 2002.

[3] C. E. Kenig, *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, AMS, 1994.

[4] C. E. Kenig, ``Some recent applications of harmonic analysis to partial differential equations,'' in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2006.

[5] L. A. Caffarelli, ``The obstacle problem revisited,'' *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4 (1998), 383--402.

[6] D. Jerison and C. E. Kenig, ``Boundary value problems on Lipschitz domains,'' in *Studies in Partial Differential Equations*, MAA Studies in Mathematics, 23 (1982), 1--68.

[7] H. W. Alt, L. A. Caffarelli, and A. Friedman, ``Variational problems with two phases and their free boundaries,'' *Transactions of the American Mathematical Society*, 282 (1984), 431--461.

[8] C. E. Kenig and T. Toro, ``Free boundary regularity for harmonic measures and Poisson kernels,'' *Annals of Mathematics*, 150 (1999), 369--454.

[9] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.

[10] P. Constantin and C. Foias, *Navier--Stokes Equations*, University of Chicago Press, 1988.

[11] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Springer, 1991.

[12] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, 2nd ed., Springer, 2006.

[13] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000.

[14] M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, ``Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations,'' *Journal of Computational Physics*, 378 (2019), 686--707.

[15] G. I
info

[16] J.-L
Cor